ＭＡ　Hoermander　多変数複素解析を読む　講義報告[2]

２００８年5月３１日（土）　１４：００－１６：００

複素多変数関数の *Cauchy* の積分公式と *Cauchy* の評価式を示し、その系として *Liouville* の定理を証明した。最後に、正則でかつ一乗可積分な関数の微分の任意のコンパクト集合上のスープノルムと L^1- ノルムとの関係を調べた。

1.2　*Cauchy* の積分公式

定義 1.3 (特殊境界). $\vec{\boldsymbol{c}} = (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{C}^n,\ \vec{\boldsymbol{r}} = (r_1, r_2, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ に対して、

$$\Delta(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}}) = \prod_{j=1}^{n} \Delta(c_j, r_j) = \prod_{j=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} \mid |z_j - c_j| < r_j\}$$

を半径 $\vec{\boldsymbol{r}}$ の $\vec{\boldsymbol{c}} \in \mathbb{C}^n$ を中心とした多重開円板とするとき、

$$\partial_0 \Delta = \prod_{j=1}^{n} \partial \Delta(c_j, r_j)$$

を多重開円板 $\Delta(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}})$ の**特殊境界**という。

定理 1.2 (*Cauchy* の積分公式). $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合、u は変数毎に正則。すなわち、Ω において他の変数を固定したとき各 z_j について解析的であるとする。 $\vec{\boldsymbol{c}} \in \Omega$ とするとき、

$$u(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 \Delta} \frac{u(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}{\prod_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu - z_\nu)} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \quad for\ \forall z \in \Delta(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}})$$

が成立する。ただし、$\overline{\Delta(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}})} \subset \Omega$ とする。さらに、

$$\begin{aligned}
\partial^J u(\vec{\boldsymbol{z}}) &= \frac{J!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 \Delta} \frac{u(\vec{\boldsymbol{\xi}}) d\vec{\boldsymbol{\xi}}}{(\vec{\boldsymbol{\xi}} - \vec{\boldsymbol{z}})^{J+e}} \\
&= \frac{j_1! j_2! \cdots j_n!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 \Delta} \frac{u(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)}{\prod_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu - z_\nu)^{j_\nu + 1}} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n
\end{aligned}$$

が成立する。ただし、$J = (j_1, j_2, \cdots, j_n)$ に対して、

$$J! = j_1! j_2! \cdots j_n!, \quad \partial^J = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{j_1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)^{j_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^{j_n}, \quad (\vec{\boldsymbol{\xi}} - \vec{\boldsymbol{z}})^J = \prod_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu - z_\nu)^{j_\nu}$$

とする。

定理 1.3 (*Cauchy* の評価式). u が多重円板 $\Delta(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}})$ の近傍で正則で、$|u(\vec{\boldsymbol{z}})| \leq M$ $(\forall \vec{\boldsymbol{z}} \in \overline{\Delta(\vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{r}})})$ を満たすとき、

$$\left|\partial^J u(\vec{\boldsymbol{c}})\right| \leq \frac{J! M}{r^J}$$

が成立する。特に、

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_\nu} u(\vec{\boldsymbol{c}})\right| \leq \frac{M}{r_\nu} \quad \nu = 1, 2, \cdots, n$$

[2]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

系 1.1 (*Liouville* **の定理**)**.** $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$ が有界すなわち、$|f(\vec{z})| \leq M$ $(\forall \vec{z} \in \mathbb{C}^n)$ を満たす $M > 0$ が存在するならば、f は定数である。

定理 1.4. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合、$K \subset \Omega$ を任意のコンパクト集合とするとき、$f \in \mathcal{A}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ ならば、$\rho = d(K, \partial\Omega)$ と微分の階数 J のみに関係する定数 $C_{K,J} > 0$ が存在して

$$\left\|\partial^J f\right\|_K \leq C_{K,J} \left\|f\right\|_{L^1(\Omega)}$$

を満たす。

記録　by　J.S